

特別講演アブストラクトへの補足

佐藤 健一

これは次のものへの補足である。

佐藤健一．レヴィ過程による確率積分の分布の性質 — 無限分解可能か否か，絶対連続か否か．日本数学会 統計数学分科会講演アブストラクト，2009 年 3 月，於 東京大学．pp. 27–44.

1. レヴィ過程は 1990 年頃までの日本ではもっぱら加法過程と呼ばれていた．日本以外では「一様独立増分を持つ確率過程」という意味の言葉で呼ばれることが多かったが，次第にこれがレヴィ過程と呼ばれるようになり，1990 年代の中頃からこの名前に定着した．1990 年出版の私の本の題は「加法過程」であったが，1996 年出版の J. Bertoin の本も 1999 年出版の私の本 [26] も Lévy process という名前を用いている．岩波数学辞典にも第 3 版までは「加法過程」という項目があったが，新しい第 4 版ではその項目がなくなり「レヴィ過程」という項目ができた．

2. 定理 1.3, 1.4 と定理 2.1 を合せば $r \leq pq$ で $c \in PV$ ならば μ は連続特異な無限分解可能分布である．このような分布の存在は常識になっていないかも知れないが，すでに H. Rubin (1967), H. G. Tucker (1964) の頃から知られている．しかしこのように簡単な形の分布がこうなることは注目に値するであろう．

3. (1) の分布 μ ，あるいは (14) の分布の $\mu^{(l)}$ が連続特異になる例はパラメタ c, p, q, r を指定して与えることができる（たとえば系 2.4 の下の例と定理 3.2）．しかしパラメタを指定して絶対連続になる例の方はまだ得られていない．たとえば定理 2.2 には「 $c \in (PS)^{-1}$ 」という条件と「 q が十分 1 に近いならば」という条件がついている．

4. 第3節では $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)})$, $l \in \mathbb{Z}$, というレヴィ過程の両方向への無限列を作り, $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)})$ から定まる一般化 OU 過程の定常分布 $\mu^{(l)}$ という列を考えた. 一般に 2次元のレヴィ過程 $(\xi_t^{(0)}, \eta_t^{(0)})$ から出発して同じ方法で $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)})$, $l \in \mathbb{Z}$, を作ることができる. このとき $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)})$ から定まる一般化 OU 過程の間にはどのような共通点があるか, どのような相違点があるかという問題が考えられる. $(\xi_t^{(0)}, \eta_t^{(0)})$ から定まる一般化 OU 過程が定常分布をもてば, $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)})$ から定まる一般化 OU 過程も定常分布をもつであろうか. それが肯定的ならば, 定常分布 $\mu^{(l)}$, $l \in \mathbb{Z}$, の間にはどのような共通点, どのような相違点があるであろうか. $\xi_t = t$ すなわちいわゆる OU 過程の場合には, $(\xi_t^{(l)}, \eta_t^{(l)}) = (\xi_t^{(0)}, \eta_t^{(0)})$ となるのでこの問題は trivial である.

5. 無限分解可能でない分布には 2 種ある. 一つは特性関数のレヴィ・ヒンチン型の表現をレヴィ測度の代りに符号つき測度を用いて持つようなもの, もう一つは符号つき測度を用いてもレヴィ・ヒンチン型の表現を持たないものである. 前者は quasi-infinitely divisible と呼ぶべきもので, ある程度よい性質を持っている. 我々の μ および $\mu^{(l)}$, $l > 0$, については, 無限分解可能でない場合を, パラメタの範囲によってこの 2 種に分類できる.

6. 無限分解可能であるということは何を意味するのであろうか? 特性関数がレヴィ・ヒンチンの標準形をもつということを除けば, 我々の知っていることは独立確率変数の null array の row sum の極限分布として表わされるという意味づけと, 時刻を固定したときのレヴィ過程の分布としてレヴィ過程と対応しているという意味づけの二つしかない. しかしこれだけでは, この講演で述べたようにパラメタの値によって無限分解可能になったりならなかったりするような現象の意味を理解することは難しい. 今後の課題である.

7. 無限分解可能分布は非常に多様である. その特性関数のレヴィ・ヒンチン表現があるからといって, その性質が分ったと思っはならない. 特に

絶対連続性と連続特異性の問題，レヴィ過程の分布と見たときの時間発展の問題は未知のことが多い．

8. 講演で述べたように古くからの無限分解可能分布の理論において知られていた現象のいくつかが確率過程に関連して現われることを我々は示した．しかし無限分解可能分布の理論にはヒンチン，リンニーク (Yu. V. Linnik) 等の分布の分解の理論など沢山の結果があり，それらと確率過程との関連は知られていない．

アブストラクトへの訂正．

p. 34, 10 行目 「対角成分」を「(1, 2) 成分」とする．

p. 35, 9 行目および 11 行目 $\sum_{0 < s \leq t}$ を $\sum_{0 < s < t}$ とする．

p. 37, 9 行目 「奇数」を「整数」とする．

なお REFERENCES [15] は *Ann. Probab.* **37**, 250–274.

(2009 年 3 月 30 日)